JOURNAL OF ALGEBRA 60, 321–336 (1979)

Endliche Gruppen, die eine Involution z besitzen, so daß $F^*(C(z))$ das direkte Produkt einer extraspeziellen 2-Gruppe von kleiner Weite mit einer elementar-abelschen 2-Gruppe ist, I

MICHAEL WESTER

Fachbereich Mathematik, Johannes Gutenberg-Universität, 6500 Mainz, Germany

Communicated by B. Huppert

Received July 17, 1978

In den einfachen Chevalley–Gruppen vom Charakteristik 2-Typ mit Ausnahme der Gruppen ${}^2F_4(2^n)$ gibt es stets eine Involution z, so daß die Gruppe $F^*(C(z))$ vom symplektischen Typ, semiextraspeziell oder das direkte Produkt einer elementar-abelschen Gruppe mit einer extraspeziellen oder einer semiextraspeziellen Gruppe ist. Ist $F^*(C(z))$ vom symplektischen Typ, so haben Aschbacher, Smith, Timmesfeld, Dempwolff, und Wong die Faktorstruktur von $C(z)$ so weit bestimmt, daß es möglich ist, alle einfachen Gruppen mit solchen Zentralisatoren zu bestimmen. Durch Stroth ist nun die Faktorstruktur von $H = C_G(z)$ in einer endlichen Gruppe $G \neq HO(G)$ für den Fall bestimmt worden, in dem $Q = F^*(C_G(z))$ das direkte Produkt einer elementar-abelschen Gruppe $E \neq 1$ mit einer extraspeziellen Gruppe F mit $F' = \langle z \rangle$ ist. Unter der Voraussetzung, daß die Gruppe H/Q treu auf $Q/Z(Q)$ operiert, und die Involution z Konjugierte in $Q \backslash Z(Q)$ besitzt, hat Stroth gezeigt, daß G entweder nicht vom Charakteristik 2-Typ ist, oder die Struktur von H weitgehend festgelegt ist. Hier gibt es eine Serie von möglichen Zentralisatoren H mit $w(F) = 2m$, diese kommen in $Sp(2m + 4, 2)$ vor, ansonsten ergeben sich 4 Einzelfälle mit kleiner Weite von F, die in $F_4(2)$ und den sporadischen Gruppen Co_2, $M(22)$ und $M(23)$ vorkommen. Das Ziel dieser Arbeit ist es, diese vier Gruppen durch die Struktur des Zentralisators einer Involution, wie sie sich aus der Arbeit von Stroth ergibt, zu charakterisieren. In einem ersten Teil untersuchen wir den Fall (iv) des Hauptsatzes von [13]. Es sei also $w(F) = 3$, es sei $H/F^*(H) \simeq A_8$, weiter sei $Q/Z(Q)$ der natürliche $SO^-(6, 2)$-Modul und $Z(Q) = Z(H) \ominus V$ wobei V der natürliche $GL(4, 2)$-Modul oder sein dualer ist. Es sollen alle endlichen Gruppen G mit einem solchen Zentralisator einer Involution z und $z \notin Z^*(G)$ bestimmt werden.

Im ersten Teil dieser Arbeit soll der folgende Satz bewiesen werden:

SATZ A. *Sei G eine endliche Gruppe, z eine Involution aus G, sei $H = C_G(z)$ und $Q = F^*(H)$. Es gelte*

0021-8693/79/100321-16$02.00/0

481/60/2-2

(i) $G \neq HO(G)$,

(ii) $H/Q \cong A_8$,

(iii) $Q = F \times E_0$ *mit* F *extraspezielle 2-Gruppe der Weite* 3 *vom* Typ $(+)$, $Z(F) = \langle z \rangle$, E_0 *elementar-abelsche 2-Gruppe und* $C_H(Q/Z(Q)) = Q$, *und*

(iv) $Z(Q) = E \oplus Z(H)$ *als H-Modul, wobei E der natürliche* $L_4(2)$*-Modul oder sein dualer sei.*

Dann ist G isomorph zu $Co_2 \times E_{2^n}$ *mit* $|Z(H)| = 2^{(n+1)}$.

Die Bezeichnungen in dieser Arbeit sind im allgemeinen wie in [5]. Weiter sei $F^*(X)$ die verallgemeinerte Fitting-Untergruppe und $L(X)$ das Produkt aller Komponenten der Gruppe X. Es sei $r(X)$ der sektionale 2-Rang von X.

Wir bezeichnen mit G immer einer Gruppe, die die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Die Behauptung des Satzes wird zunächst für $Z(H) = \langle z \rangle$ bewiesen. Hier konstruieren wir eine 2-lokale Untergruppe in G, die isomorph zu einer Erweiterung von $E_{2^{10}}$ durch $\mathrm{Aut}(M_{22})$ ist. Yoshida's Charakterisierung von Co_2 durch eine Sylow 2-Untergruppe zeigt $G \cong Co_2$. Der Rest des Beweises ist eine Induktion nach $|Z(H)|$.

1. Vorbereitende Ergebnisse

Lemma 1.1. *Die Gruppe* $H/Z(Q)$ *zerfällt über* $Q/Z(Q)$.

Beweis. Siehe [7].

Lemma 1.2. *Die Involution z besitzt Konjugierte in* $Q \backslash Z(Q)$.

Beweis. Genau dies wird in einem Beispiel im letzten Abschnitt von [15] gezeigt.

Lemma 1.3. *Sei G eine endliche Gruppe mit* $O(G) = 1$. *Sei E eine 2-Untergruppe von G mit* $|E| \leqslant 16$. *Setze* $F = EC_G(E)$. *Weiter sei E eine Sylow 2-Untergruppe von F und* $O_2(N_G(E)/F) = 1$. *Dann ist* $L(G)$ *bekannt. Ist insbesondere* $E \cong E_{16}$ *und* $N_G(E)/F \cong L_2(7)$, *so ist* $r(L(G)) \leqslant 4$ *oder* $L(G)$ *ist eine perfekte zentrale Erweiterung von* Z_2 *durch* M_{22}.

Beweis. Siehe [14].

Lemma 1.4. *Sei S eine Sylow 2-Untergruppe der endlichen Gruppe G, setze* $Z = \Omega_1(Z(S))$. *Gilt* $Z \leqslant G'$ *und* $Z \leqslant S'$, *so ist* ZS'/S' *nicht zyklisch.*

Beweis. Siehe [17, Corollary 1.3].

Lemma 1.5. *Sei S eine 2-Gruppe der Ordnung 2^8, auf der eine Gruppe $K \cong \sum_6$ treu operiert. Ein Element der Ordnung 5 aus K operiere fixpunktfrei auf S. Dann ist S elementar-abelsch.*

Beweis. Dies folgt mit [3, Satz 3.14, 3.18; 10].

Lemma 1.6. *Sei $K \cong \sum_6$, sei V ein treuer 8-dimensionaler K-Modul über $GF(2)$ und V_1 ein 4-dimensionaler Untermodul von V. Die beiden K-Moduln V_1 und V/V_1 seien irreduzibel und nicht äquivalent. Dann operiert K vollständig reduzibel auf V.*

Beweis. Da V_1 und V/V_1 nichtäquivalente K-Moduln sind, gibt es in K eine Untergruppe $H \cong A_5$, die auf $(V/V_1)^{\#}$ intransitiv und auf $V_1^{\#}$ transitiv operiert. Weiter operiert H nach [3] vollständig reduzibel auf V. Unter H erhalten wir eine K-invariante Bahn der Länge 15, zwei Bahnen der Länge 5 und 10 und schließlich weitere Bahnen der Länge $\geqslant 15$. Es sei v ein Element aus der H-Bahn der Länge 5. Dann ist $C_H(v) \cong A_4$, und damit liegt $C_{K'}(v)$ in einer $\sum_4$. Wir nehmen $C_{K'}(v) \cong A_4$ an. Die Gruppe $C_{K'}(v)$ hat keine Fixpunkte auf $V_1^{\#}$. es folgt $C_V(C_{K'}(v)) = \langle v \rangle$. Aber auf dieser Gruppe operiert $N_{K'}(C_{K'}(v)) \cong \sum_4$, ein Widerspruch. Es folgt $C_{K'}(v) \cong \sum_4$, also liegt v in einer K'-Bahn der Länge 15, die sich aus den H-Bahnen der Länge 5 und 10 zusammensetzt. Die Gruppe $K' \cong A_6$ operiert somit vollständig reduzibel auf V. Die beiden 4-dimensionalen K'-Moduln in V sind aber unter K nicht konjugiert, also ist V auch ein vollständig reduzibler K-Modul.

Lemma 1.7. *Sei V ein 8-dimensionaler orthogonaler Raum vom* (—)-Typ *über $GF(2)$. Setze $G = O(V) \cong O_8^+(2)$. Sei U eine Untergruppe von G mit Normalteiler $E \cong E_{32}$ und $U = EK$, $K \cong \sum_6$, so daß $|Z(U)| = 2$. Weiter operiere eine Sylow 5-Untergruppe von U fixpunktfrei auf V.*

Dann ist die Operation von U auf V eindeutig bestimmt. Insbesondere operiert eine geeignete Untergruppe $K_0 \cong \sum_6$ von U vollständig reduzibel auf V.

Beweis. Nach [1] gibt es in G genau drei Klassen von Involutionen, deren Zentralisatoren in G nicht auflösbar sind. Es seien t_1, t_2, t_3 Vertreter dieser drei Klassen. Dann ist t_1 vom Typ a_4 mit $C_G(t_1)/O_2(C_G(t_1)) \cong \sum_6$, t_2 ist vom Typ b_1 mit $C_G(t_2) \cong Sp(6, 2) \times Z_2$ und t_3 ist vom Typ c_2 mit $C_G(t_3)/O_2(C_G(t_3)) \cong \sum_6$. Da eine Sylow 5-Untergruppe von $C_G(t)$ mit $Z(U) = \langle t \rangle$ auf V fixpunktfrei operiert, ist t vom Typ a_4. Es ist $O_2(C_G(t_1)) \cong E_{64}$ ein unzerlegbarer $\sum_6$-Modul mit Kompositionsreihe $1 \subset W_1 \subset W_2 \subset W_3$ und $W_1 \cong W_3/W_2 \cong Z_2$, $W_2/W_1 \cong E_{16}$. Es folgt $E = W_2$, dabei haben wir $t = t_1$ gesetzt. In $C_G(t)$ gibt es genau eine zerfallende und eine nichtzerfallende Erweiterung von E durch $\sum_6$, damit ist U eindeutig bestimmt.

Stellen wir t bezüglich einer geeigneten Basis von isotropen Vektoren $\{x_1, \ldots, x_8\}$ mit $(x_i, x_{9-i}) = 1$, $i = 1, \ldots, 4$, $(x_i, x_j) = 0$ sonst, auf V dar, so ist

$$t \leftrightarrow \begin{pmatrix} E & \\ E & E \end{pmatrix}, \text{ wobei } E \text{ die 4-dimensionale Einheitsmatrix sei.}$$

Weiter gibt es in U eine Untergruppe $K_0 \cong \sum_6$ mit der entsprechenden Darstellung

$$K_0 \leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} X & \\ & X \end{pmatrix}, X \in C_{GL(4,2)}(y) \right\},$$

wobei y der Graphautomorphismus der $GL(4, 2)$ sei. Insbesondere operiert K_0 vollständig reduzibel auf V. Das Lemma ist bewiesen.

Lemma 1.8. *Die Gruppe M_{22} besitzt genau zwei 10-dimensionale irreduzible $GF(2)$-Moduln. Der eine zerfällt unter M_{22} in Bahnen der Länge 77/330/616, der andere in Bahnen der Länge 22/231/770.*

Beweis. In den einfachen Gruppen Co_2 und $M(22)$ findet man als Untergruppen je eine Erweiterung von $E_2 10$ durch M_{22}. In Co_2 erhält man die Bahnzerlegung 77/330/616 und in $M(22)$ die Bahnzerlegung 22/231/770 des 10-dimensionalen M_{22}-Moduls. Da 10 der minimale Grad einer nichttrivialen 2-modularen Darstellung von M_{22} ist, gibt es nach [11] genau zwei irreduzible 10-dimensionale M_{22}-Moduln über $GF(2)$, diese sind folglich in Co_2 und $M(22)$ realisiert.

Lemma 1.9. *Sei X eine Gruppe mit Normalteiler $V \cong E_2 10$ und $X/V \cong \mathrm{Aut}(A_6)$. Sei weiter Y der eindeutig bestimmte Normalteiler von X mit $V < Y$ und $Y/V \cong \sum_6$. Sei $1 \subset V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset V$ eine Y-Kompostitionsreihe mit $V_1 \cong V_3/V_2 \cong Z_2$ und $V_2/V_1 \cong V/V_3 \cong E_{16}$. Ist $V_1 \not\leqslant Z(X)$, und zerfällt Y/V_2 über V/V_2, so zerfällt Y über V.*

Beweis. Sei $t \in X \setminus Y$. Es operiert t auf $C_V(Y) \geqslant V_1$. Wegen $V_1 \not\leqslant Z(X)$ hat $C_V(Y)$ die Ordnung 4. Setze $V_1{}^t = V_1'$, dann ist $V_3 = V_2 V_1'$. Insbesondere ist $V_2{}^t \neq V_2$. Die Gruppe Y operiert auf V_2, also auch auf $V_2{}^t$ und $V_2 \cap V_2{}^t$. Eine Gruppe isomorph zu A_8 enthält keine Untergruppe isomorph zu $\mathrm{Aut}(A_6)$, somit ist $V_2 \cap V_2{}^t = 1$. Da aber Y/V_2 über V/V_2 zerfällt, da $V = V_2 \ominus V_2{}^t$ als Y-Modul ist und $Y = Y^t$ gilt, muß Y über V zerfallen.

Lemma 1.10. *Sei G eine endliche Gruppe, z eine Involution in G und $H = C_G(z)$. Sei $Q = F^*(H)$ das direkte Produkt einer extraspeziellen Gruppe F mit einer elementar-abelschen Gruppe E, wobei $w(F) \geqslant 3$, $F' = \langle z \rangle$ und $|E| \geqslant 2$ sei. Sei $C_H(Q/Z(Q)) = Q = C_H(Z(Q))$. Ist $z_G \cap Q \not\subseteq Z(Q)$ und $C_G(t) = HO(C_G(t))$ für alle $t \in Z(H)^{\#}$, so gilt $Z(H) = \langle z \rangle$.*

Beweis. Die Voraussetzungen von Satz 2.11 aus [13] sind erfüllt. Also gibt es ein $a \in Q \setminus Z(Q)$ mit $a \sim z$ und $z \in Q_a = F^*(C_G(a))$. Es folgt $Z(Q_a) \leqslant C_G(z) = H$, also $Z(H) \leqslant C_G(Z(Q_a)) = Q_a$. Insbesondere folgt $[Z(H), Q_a \cap H] = 1$. Sei R eine Hyperebene in $Z(Q)$. Nach Voraussetzung gilt $C_G(R) \leqslant HO(C_G(R))$. Damit ist Lemma 2.13 aus [13] anwendbar, und es folgt $z \notin Z(Q_a)$, d.h. $Q_a \nleqslant H$. Mit $z \in Q_a$ folgt $|Q_a : Q_a \cap H| = 2$, also $C_G(Q_a \cap H) = Z(Q_a)\langle z\rangle$. Es folgt $Z(H) \leqslant Z(Q_a)\langle z\rangle$. Nach Voraussetzung kann wegen $Q_a \nleqslant H$ kein Element aus $Z(H)^{\#}$ von Q_a zentralisiert werden. Es folgt $Z(H) \cap Z(Q_a) = 1$, d.h. $Z(H) = \langle z\rangle$.

2. Die Operation von H/Q auf $Q/Z(H)$

Es sei also $H = C_G(z)$ für eine Involution z aus G und $Q = O_2(H) = FZ(Q)$ mit $F \cap Z(Q) = Z(F) = \langle z\rangle$, dabei sei F extraspeziell der Weite 3 vom Typ $(+)$ und $Z(Q)$ elementar-abelsch. Die Gruppe $H/Q \cong A_8$ operiere treu auf dem 6-dimensionalen orthogonalen Modul $Q/Z(Q)$. Ferner sei $Z(Q) = E \times Z(H)$ und E der natürliche $L_4(2)$-Modul oder sein dualer.

In diesem Abschnitt bezeichnen wir mit $\hat{H}$ die Gruppe $H/Z(H)$, mit $\tilde{H}$ die Gruppe $H/Z(Q)$ und mit $\bar{H}$ die Gruppe H/Q. Es sei $\{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3, \tilde{f}_4, \tilde{f}_5, \tilde{f}_6\}$ eine Basis des orthogonalen Raumes $\tilde{F}$, so daß die Urbilder f_i in Q die Gruppe F erzeugen und den Relationen

$$f_i^2 = 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant 6, \quad [f_1, f_2] = [f_3, f_4] = [f_5, f_6] = z, \quad [f_i, f_j] = 1 \text{ sonst},$$

genügen. Weiter sei $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ eine Basis von E. Mit $\bar{t}_{ij}$ sei die Involution aus $\bar{H}$ bezeichnet, die auf E die Transvektion $e_i \to e_i e_j$ bzw. $e_j \to e_j e_i$ bewirkt, jenachdem ob E der natürliche $L_4(2)$-Modul oder sein dualer ist.

Sei E der natürliche $L_4(2)$-Modul und E_d der zu E duale. Da $\tilde{F}$ ein selbstdualer $L_4(2)$-Modul ist, sind $\tilde{F} \oplus E$ und $\tilde{F} \oplus E_d$ zueinander duale $L_4(2)$-Moduln.

Wir stellen $\bar{H}$ auf $\tilde{F} \oplus E$ dar, wobei nun o.B.d.A. E der natürliche $L_4(2)$-Modul sei. Wir setzen

$$\bar{t}_{ij} = \begin{pmatrix} \tilde{t}_{ij} & \\ \hline & t_{ij} \end{pmatrix} \begin{matrix} \tilde{F} \\ \\ E \end{matrix} \qquad 1 \leqslant i,\ j \leqslant 4, \quad i \neq j,$$

wobei t_{ij} auf E die Transvektion $e_i \to e_i e_j$ bewirkt und die $\tilde{t}_{ij}$ entsprechend orthogonale 6×6-Matrizen sind, die den Relationen

$$\tilde{t}_{ij}^2 = 1, \qquad [\tilde{t}_{ij}, \tilde{t}_{kl}] = 1, \qquad i \neq l,\ j \neq k,$$
$$[\tilde{t}_{ij}, \tilde{t}_{jl}] = \tilde{t}_{il}, \qquad i \neq l \ \text{ und } \ (\tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{ji})^3 = 1,$$

alle anderen Kommutatoren trivial, genügen. Solche $\tilde{t}_{ij}$ geben wir nun an. Es sei dafür s_{jl} die 6×6-Matrix, die in der j-ten Zeile an der l-ten Stelle eine 1 und sonst lauter Nullen besitzt. Sei weiter I die 6-dimensionale Einheitsmatrix und sei $u_{jl} = s_{jl} + I$.

Wir setzen

$$\begin{aligned}
\tilde{t}_{12} &= u_{35}u_{64}\,, & \tilde{t}_{21} &= u_{53}u_{46}\,, & \tilde{t}_{13} &= u_{15}u_{62}\,,\\
\tilde{t}_{31} &= u_{51}u_{26}\,, & \tilde{t}_{14} &= u_{14}u_{32}\,, & \tilde{t}_{41} &= u_{41}u_{23}\,,\\
\tilde{t}_{23} &= u_{13}u_{42}\,, & \tilde{t}_{32} &= u_{31}u_{24}\,, & \tilde{t}_{24} &= u_{16}u_{52}\,,\\
\tilde{t}_{42} &= u_{61}u_{25}\,, & \tilde{t}_{34} &= u_{36}u_{54}\,, & \tilde{t}_{43} &= u_{63}u_{45}\,.
\end{aligned}$$

Damit ist $\bar{H} = \langle \bar{t}_{ij}\,, 1 \leqslant i, j \leqslant 4\rangle$ auf $\tilde{F} \oplus E$ dargestellt. Nun soll $\bar{H}$ auf dem 10-dimensionalen Modul $\hat{Q} = Q/Z(H)$ dargestellt werden. Wir setzen dazu

$$\bar{t}_{ij} = \begin{pmatrix} \tilde{t}_{ij} & x_{ij} \\ \hline & t_{ij} \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{F} \\ \\ \hat{E} \end{matrix}\,.$$

Die Relationen der $\bar{t}_{ij}$ führen zu den folgenden Bestimmungsgleichungen für die 6×4-Matrizen x_{ij}:

(i) $\tilde{t}_{ij}x_{ij} = x_{ij}t_{ij}\,,$

(ii) $\tilde{t}_{kl}x_{kl} + \tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{kl}x_{ij}t_{kl} + \tilde{t}_{ij}x_{kl}t_{ij}t_{kl} + x_{ij}t_{ij} = 0$ für $i \neq l$, $j \neq k$,

(iii) $\tilde{t}_{jl}\tilde{t}_{il}x_{jl} + \tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{jl}x_{ij}t_{jl} + \tilde{t}_{ij}x_{jl}t_{ij}t_{jl} + x_{ij}t_{ij}t_{il} = x_{il}$ für $i \neq l$.

Wir setzen schließlich

$$x_{12} = (a_{ij}), \qquad x_{13} = (b_{ij}), \qquad x_{14} = (c_{ij}).$$

Lemma 2.1. *Sei* $\tilde{t}_{ij} = u_{rs}u_{vw}$. *Dann besitzt die Matrix* x_{ij} *nur Einträge in der* j*-ten Spalte, in der* r*-ten Zeile und in der* v*-ten Zeile. Weiter gilt* $y_{ri} = y_{sj}$ *und* $y_{vi} = y_{wj}$, *wobei* $x_{ij} = (y_{kl})$.

Beweis. Dies erhält man leicht aus Bedingung (i) und (ii).

Lemma 2.2. *Es gilt* $|\,C_{\hat{Q}}(\langle \bar{t}_{12}\,, \bar{t}_{13}\,, \bar{t}_{14}\rangle)| = 2^6$.

Beweis. Mit Lemma 2.1 erhält man

$$x_{12} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{61} & 0 & 0 \\ 0 & a_{31} & 0 & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} \end{pmatrix},$$

$$x_{13} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 0 & b_{61} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 \\ 0 & 0 & b_{43} & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & 0 \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} \end{pmatrix};$$

$$x_{14} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 0 & 0 & c_{31} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & c_{41} \\ 0 & 0 & 0 & c_{54} \\ 0 & 0 & 0 & c_{64} \end{pmatrix}.$$

Weiter liefert Bedingung (ii), angewandt auf $[\bar{t}_{12}, \bar{t}_{13}] = [\bar{t}_{12}, \bar{t}_{14}] = [\bar{t}_{13}, \bar{t}_{13}] = 1$ die Gleichungen

$$a_{22} = b_{61} = c_{31}, \qquad a_{61} = b_{43} = c_{11}, \qquad \text{und} \qquad a_{31} = b_{11} = c_{54}.$$

Man hat weiter $C_{\tilde{Q}}(\langle \bar{t}_{12}, \bar{t}_{13}, \bar{t}_{14}\rangle) = \langle \tilde{f}_2, \tilde{f}_4, \tilde{f}_5\rangle$. Die obigen Gleichungen führen zu

$$C_{\tilde{Q}}(\langle \bar{t}_{12}, \bar{t}_{13}, \bar{t}_{14}\rangle) = \langle \tilde{f}_2, \tilde{f}_4, \tilde{f}_5, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\rangle,$$

dabei haben wir o.B.d.A. die Umbenennung $\tilde{f}_2$ für $\tilde{f}_2\tilde{e}_1^{a_{22}}$, $\tilde{f}_4$ für $\tilde{f}_4\tilde{e}_1^{a_{61}}$ und $\tilde{f}_5$ für $\tilde{f}_5\tilde{e}_1^{a_{31}}$ durchgeführt. Die Behauptung ist bewiesen.

Wir setzen $\bar{K} = \langle \bar{t}_{12}, \bar{t}_{13}, \bar{t}_{14}\rangle$ und $\bar{N} = N_{\bar{H}}(\bar{K})$. Es ist $\bar{N} = \bar{K}\bar{L}$ mit $\bar{K} \cap \bar{L} = 1$ und $\bar{L} \cong L_2(7)$. Nach Lemma 1.1 können wir Urbilder t_{ij} der $\bar{t}_{ij}$ in H finden, so daß t_{ij} in $Z(Q)$ liegt. Wir setzen $T = Q\langle t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24}, t_{34}\rangle$. Dann ist T eine Sylow 2-Untergruppe von H.

3. Eine schwach abgeschlossene Untergruppe in T im Fall $Z(H) = \langle z\rangle$

Im folgenden sei $Z(H) = \langle z\rangle$ angenommen. Wir beweisen den Satz zunächst für diesen Fall und führen dann eine Induktion durch. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß T genau eine abelsche Untergruppe der Ordnung 2^{10} besitzt.

Lemma 3.1. *Es ist $J(T)$ eine abelsche Gruppe der Ordnung 2^{10}.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß T eine abelsche Untergruppe der Ordnung 2^{10} besitzt. Wir setzen $V = \langle z, e_2, e_3, e_4, f_2, f_4, f_5\rangle$. Nach Lemma 2.2 ist

$[\bar{K}, V/\langle z\rangle] = 1$. Weiter ist für jedes Urbild K_0 von $\bar{K}$ in H auch $[K_0, \langle e_2, e_3, e_4\rangle] = 1$. Wir zeigen, daß es ein Urbild K_1 von $\bar{K}$ mit $[K_1, V] = 1$ gibt. Dazu bilden wir die Erweiterung $\mathfrak{X}$ von Q/E durch $\bar{N} = N_{\bar{H}}(\bar{K})$. Es ist $\mathfrak{X}/O_2(\mathfrak{X}) \cong L_2(7)$ und $|O_2(\mathfrak{X})| = 2^{10}$. Weiter sei $\mathfrak{W} = \langle zE, f_2E, f_4E, f_5E\rangle$. Dann ist $\mathfrak{W}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{X}$ isomorph zu E_{16}, auf dem $\bar{L} \cong L_2(7)$ operiert. Klar ist $C_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{W}) > \mathfrak{W}$, also $|C_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{W})| = 2^7$, und es gibt wegen Q/E extraspeziell ein Urbild K_1 von $\bar{K}$ in H mit $[K_1, \langle f_2, f_4, f_5\rangle] \leqslant E$ und

$$K_1 \cap Q \leqslant C_Q(\bar{K} \bmod \langle z\rangle) = V.$$

Nach Lemma 2.2 gilt für jedes Urbild K von $\bar{K}$ in H die Beziehung $[K, \langle f_2, f_4, f_5\rangle] \leqslant \langle z\rangle$. Es folgt $[K_1, \langle f_2, f_4, f_5\rangle] \leqslant E \cap \langle z\rangle = 1$, also $[K_1, V] = 1$. Auf der Gruppe $X = K_1V$ der Ordnung 2^{10} operiert eine Gruppe L isomorph zu $L_2(7)$. Ist K_1 abelsch, so ist mit X eine abelsche Gruppe der Ordnung 2^{10} in T gefunden. Sei also $K_1' = X' \neq 1$. Dann ist $Z(X) = V$, weiter ist $|K_1'| \leqslant 2^3$. Wegen $Z(K_1) \leqslant V$ ist $|K_1'| \neq 2$. Es folgt $|K_1'| = 2^3$ und $\mho^1(X) = K_1'$. Ein Element σ aus L der Ordnung 7 operiert fixpunktfrei auf $\hat{X}$. Sei $\hat{X}/\hat{X}' = V/\hat{X}' \ominus \hat{K}_0/\hat{X}'$ eine σ-invariante Zerlegung von $\hat{X}/\hat{X}' \cong E_{64}$. Dann ist $\hat{K}_0$ eine spezielle Gruppe der Ordnung 64 mit Zentrum der Ordnung 8. Diese Gruppe besitzt jedoch keinen fixpunktfreien Automorphismus der Ordnung 7, der auf $\hat{K}_0/\hat{K}_0'$ und $\hat{K}_0'$ das gleiche charakteristische Polynom besitzt, ein Widerspruch zur bekannten Operation von σ auf X.

Sei nun J eine abelsche Untergruppe von T der Ordnung 2^{10}. Es ist E keine Untergruppe von J, denn sonst liegt J in $C_H(E) = Q$, und abelsche Gruppen in Q haben Ordnung $\leqslant 2^8$, ein Widerspruch. Weiter ist $\bar{J} \neq J(\bar{T}) = \langle \bar{t}_{13}, \bar{t}_{14}, \bar{t}_{23}, \bar{t}_{24}\rangle$, sonst $|\bar{J} \cap \hat{Q}| \leqslant |C_{\hat{Q}}(J(\bar{T}))| \leqslant 2^3$. Es folgt $|\bar{J}| = 2^3$, $|J \cap Q| = 2^7$ und $|J \cap E| = 2^3$. Die Struktur der Sylow 2-Untergruppen der beiden Erweiterungen von E_{16} durch A_8 zeigt $J \cap E = \langle e_2, e_3, e_4\rangle$ und $\bar{J} = \langle \bar{t}_{12}, \bar{t}_{13}, \bar{t}_{14}\rangle = \bar{K}$. Man erhält $J \cap Q = C_Q(\bar{K} \bmod \langle z\rangle) = V$ mit Lemma 2.2. Mit $|C_T(V)| = 2^{10}$ folgt $J = VK_1$. Somit gibt es genau eine abelsche Untergruppe der Ordnung 2^{10} in T. Je nach Typ der Erweiterung von $Z(Q)$ durch eine Untergruppe isomorph zu A_8 aus $H/Z(Q)$ ist $J(T)$ elementar abelsch oder vom Typ (2, 2, 2, 2, 4, 4, 4).

Wir setzen $N_0 = N_H(J(T))$. Nach Lemma 3.1 ist $J(T) = K_1V$ mit $V = J(T) \cap Q$ und $\bar{K}_1 = \bar{K}$. Es ist $N_0/Q \cong E_8L_2(7)$, $N_0/QK_1 \cong L_2(7)$ und $(N_0 \cap Q)\, J(T)/J(T) \cong E_{16}$. Somit ist $\mathfrak{N} = N_0/J(T)$ isomorph zu einer Erweiterung von E_{16} durch $L_2(7)$. Wir setzen $\mathfrak{E} = O_2(\mathfrak{N})$ und $\langle \mathfrak{n}_1\rangle = Z(\mathfrak{N})$. Nach Lemma 1.1 gibt es in $\mathfrak{N}$ eine Untergruppe $\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{E} \leqslant \langle \mathfrak{n}_1\rangle$ und $\mathfrak{L} \cong L_2(7)$ oder $SL(2, 7)$. Eine $\mathfrak{L}$-Kompositionreihe von $J(T)$ hat die Gestalt $1 \subset W_1 = \langle z\rangle \subset W_2 = W_1\langle e_2, e_3, e_4\rangle \subset W_3 = W_2\langle f_2, f_5, f_4\rangle = V \subset W_3 = J(T)$. Sei r ein Element aus $J(T)\backslash Q$. Dann ist $\langle r^{\mathfrak{N}}\rangle = J(T)$, insbesondere operiert $\mathfrak{N}$ unzerlegbar auf $J(T)$.

4. Bestimmung von $\mathfrak{M} = N_G(J(T))/J(T)$

Lemma 4.1. *Es ist $\mathfrak{N}$ eine echte Untergruppe von $\mathfrak{M}$.*

Beweis. Wir nehmen an $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$. Insbesondere ist dann T eine Sylow 2-Untergruppe von G und $\mathfrak{N}$ kontrolliert die Fusion in $J(T)$. Nach Lemma 1.2 besitzt z Konjugierte in $Q\backslash\langle z\rangle$. Weiter besitzt z keine Konjugierten in $J(T)\backslash\langle z\rangle$. Da alle Involutionen aus $Z(Q)$ Konjugierte in $J(T)$ besitzen, liegen alle Konjugierten von z aus $Q\backslash\langle z\rangle$ bereits in $Q\backslash Z(Q)$. In $Q/Z(Q)$ gibt es genau eine Klasse von Involutionen, deren Urbilder in Q auch Involutionen sind. Es sei also o.B.d.A. $z \sim ae$ mit $a \in J(T) \cap Q\backslash Z(Q)$ und $e \in E$. Es ist dann $V\langle a, z\rangle \leqslant J(T)$ mit $V = \langle e_2, e_3, e_4\rangle$, also $e = e_1 e_v$ mit $e_v \in V$. Die Gruppe K_1 operiert regulär auf ae_1V, weiter ist $a \sim az$. Also hat ae in $aZ(Q)$ mindestens $16H$-Konjugierte. Wegen $z^G \cap J(T) = \{z\}$ besitzt ae keine H-Konjugierten in $J(T)$, somit gibt es unter H genau $35 \cdot 16$ Konjugierte von ae. Man erhält

$$| C_H(ae)Q/Q | = 2^3 \cdot 3^2$$

und $C_H(ae)Q/Q$ ist eine Untergruppe von $C_{\bar{H}}(\hat{a}) \simeq E_{16}(\Sigma_3 \times \Sigma_3)$.

Es ist $ae \in z^G\backslash Z(Q)$. Wir setzen $Q_{ae} = F^*(C_G(ae))$ und $L_{ae} = Q(Q_{ae} \cap H)$. Nun verwenden wir [13]. Da sämtliche Fusion in $aZ(Q)$ bereits in H stattfindet, kann man nach Satz 2.11 aus [13] o.B.d.A. die Involution ae so wählen, daß $z \in Q_{ae}$ gilt. Weiter wird im Lemma 2.18 aus [13] gezeigt, daß $|\bar{L}_{ae}| \geqslant 8$ gilt, falls die folgende Hypothese (2.12 aus [13]) zutrifft:

Hypothese. Es gibt keine Hyperebene R von $Z(Q)$ mit $C_G(R)/O(C_G(R)) \leqslant HO(C_G(R))/O(C_G(R))$.

Sei also R eine Hyperebene in $Z(Q)$. Die Hypothese ist für $z \in R$ erfüllt. Sei also $Z(Q) = \langle z\rangle \times R$. Dann ist $C_H(R) = Q$, somit ist wegen $Q' = \langle z\rangle$ dann Q bereits eine Sylow 2-Untergruppe von $C_G(R)$. Sei $x \in C_G(R)$ mit $z^x \in Z(Q)$. Dann normalisiert x die Gruppe $Z(Q)$, also auch $Q = C_G(Z(Q))$, d.h. x liegt in H und $z^x = z$. Also besitzt z unter $C_G(R)$ keine Konjugierten in $Z(Q)\backslash\{z\}$. Sei $z^x = b \in Q\backslash Z(Q)$ mit $x \in C_G(R)$. Setzen wir $Q_b = F^*(C_G(b))$, so ist dann $Z(Q_b) = Z(Q)^x = R\langle b\rangle$. Damit erhält man $C_Q(b) \leqslant C_G(R\langle b\rangle) = C_G(Z(Q_b)) = Q_b$, also $|Q : (Q_b \cap Q)| = 2$. Das liefert den Widerspruch $b \in Q'$. Wir haben gezeigt, daß z unter $C_G(R)$ in $Q\backslash\{z\}$ keine Konjugierten besitzt. Nach einem Satz von Glauberman folgt $z \in Z^*(C_G(R))$. Somit trifft die Hypothese zu.

Somit ist eine Sylow 2-Untergruppe von $\overline{C_H(ae)}$ isomorph zu E_8. Sei X eine Gruppe isomorph zum Normalisator einer E_{16} in A_8, also $X \simeq C_{\bar{H}}(\hat{a})$, und sei Y eine Untergruppe von X der Ordnung $2^3 \cdot 3^2$ mit einer Sylow 2-Untergruppe isomorph zu E_8. Wir wollen zeigen, daß es so etwas nicht gibt. Wäre $O_3(Y) = 1$, so wäre, da Y auflösbar ist, $C_Y(O_2(Y)) \leqslant O_2(Y)$. Das ist aber nicht möglich, da 3^2 nicht die Ordnung von $L_3(2)$ teilt. Der Normalisator einer Sylow 3-Untergruppe von X in X hat die Ordnung $3^2 \cdot 2^2$. Es folgt $O_3(Y) \cong Z_3$. Dann ist $Y \cap O_2(X) = C_{O_2(X)}(O_3(Y)) \cong E_4$, aber die Gruppe $N_Y(O_3(Y))/C_Y(O_3(Y)) \neq 1$ operiert nichttrivial auf $C_{O_2(X)}(O_3(Y))$, ein Widerspruch. Die Behauptung folgt.

LEMMA 4.2. *Sei $\mathfrak{X}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{M}$, die $\mathfrak{L}$ als Untergruppe enthält. Dann ist $O(\mathfrak{X}) = 1$.*

Beweis. Wir nehmen $O(\mathfrak{X}) \neq 1$ an. Es ist $C_{J(T)}(\mathfrak{L}) = \langle z \rangle$, also operiert $\mathfrak{L}$ nichttrivial auf $O(\mathfrak{X})$. Weiter ist $\mathfrak{X}$ eine Untergruppe von $L_{10}(2)$, also gilt $| O(\mathfrak{X})| \mid |L_{10}(2)|_{2'} = 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 31^2 \cdot 73 \cdot 127$. Klar ist $O_p(\mathfrak{X}) = 1$ für $p = 11$, 17, 73, und 127. Weiter ist $O_p(\mathfrak{X}) = 1$ für $p = 5$, 31, da keine $L_2(7)$ in $GL(2, 5)$ oder $GL(2, 31)$ involviert ist. Der 3-Rang von $L_{10}(2)$ ist 5, also ist $| \Omega_1(Z(O_3(\mathfrak{X})))| \leqslant 3^5$, aber in $GL(5, 3)$ ist ebenfalls keine $L_2(7)$ involviert. Es folgt $O_7(\mathfrak{X}) \neq 1$, und damit ist $\mathfrak{X}$ eine Untergruppe der treuen Erweiterung von $E_7 2$ durch $GL(2, 7)$. Aber die Sylow 7-Untergruppen von $L_{10}(2)$ sind abelsch, das ist ein Widerspruch. Also ist $O(\mathfrak{X}) = 1$. Insbesondere ist $O(\mathfrak{M}) = 1$.

LEMMA 4.3. *Es ist $\mathfrak{M} \cong \mathrm{Aut}(M_{22})$. Insbesondere ist $J(T) \cong E_2 10$. Die in H involvierte Erweiterung von E_{16} durch A_8 zerfällt.*

Beweis. Es ist $[J(T), \mathfrak{E}] = J(T) \cap Q$ und damit $[J(T), \mathfrak{E}, \mathfrak{E}] = \langle z \rangle$. Also folgt $N_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{E}) = \mathfrak{N}$. Nach Lemma 1.3 ist $r(L(\mathfrak{M})) \leqslant 4$ oder $L(\mathfrak{M}) \cong \hat{M}_{22}$, hiermit sei die perfekte zentrale Erweiterung von Z_2 durch M_{22} gemeint. Sei $L(\mathfrak{M}) \cong \hat{M}_{22}$. Auf der echten Untergruppe $[J(T), Z(L(\mathfrak{M}))]$ von $J(T)$ operiert ein Element der Ordnung 11 aus $L(\mathfrak{M})$, das ist unmöglich. Es folgt also $r(L(\mathfrak{M})) \leqslant 4$.

Wir setzen $\mathfrak{C} = C_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{n}_1) \geqslant \mathfrak{N}$. Nach Lemma 4.2 ist $O(\mathfrak{C}) = 1$. Weiter operiert $\mathfrak{C}$ auf $[J(T), \mathfrak{n}_1] = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle = V$ und $\mathfrak{L}$ operiert nichttrivial auf V, somit ist $\mathfrak{C} = C_{\mathfrak{C}}(V)\mathfrak{L}$. Es sei $\mathfrak{W} = C_{\mathfrak{C}}(V)$. Wegen $C_{J(T)}(\mathfrak{L}) = \langle z \rangle$ operiert $\mathfrak{L}$ treu auf $\mathfrak{W}/\langle \mathfrak{n}_1 \rangle$. Es ist $\mathfrak{W} \cap N_H(J(T))/J(T) = \mathfrak{W} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$, also hat die Gruppe $\mathfrak{W}/\langle \mathfrak{n}_1 \rangle$ eine Ordnung $\leqslant 2^3 \cdot 1023$. Nach [8] ist in $\mathfrak{W}$ keine unbekannte einfache Gruppe involviert und damit $\mathfrak{W}$ auflösbar. Wegen $O(\mathfrak{C}) = 1$ ist $O(\mathfrak{W}/\langle \mathfrak{n}_1 \rangle) = 1$, also $O_2(\mathfrak{W}) > \langle \mathfrak{n}_1 \rangle$. Wir setzen $\mathfrak{U} = \mathfrak{E} O_2(\mathfrak{W})$. Dann ist $\mathfrak{U}$ eine 2-Gruppe mit $N_{\mathfrak{U}}(\mathfrak{E}) = \mathfrak{E}$. Es folgt $O_2(\mathfrak{W}) \leqslant \mathfrak{E}$, und da $\mathfrak{L}$ auf $O_2(\mathfrak{W})$ operiert sogar $O_2(\mathfrak{W}) = \mathfrak{E}$. Mit $N_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{E}) = \mathfrak{N}$ erhält man $\mathfrak{C} = \mathfrak{N}$.

Zunächst untersuchen wir $L(\mathfrak{M}) = 1$, also $O_2(\mathfrak{M}) > 1$.

Es sei $\mathfrak{X} = Z(O_2(\mathfrak{M})) \cap \mathfrak{N}$. Wegen $\mathfrak{N} = C_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{n}_1)$ ist $\mathfrak{X} \neq 1$. Ist $\mathfrak{X} = \langle \mathfrak{n}_1 \rangle$, so folgt $O_2(\mathfrak{M}) = \langle \mathfrak{n}_1 \rangle$ und damit $\mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{N}$, ein Widerspruch. Ist $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$, so erhält man $O_2(\mathfrak{M}) = \mathfrak{E}$ und damit den Widerspruch $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$. Es bleibt der Fall $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} \cong E_8$ und $\mathfrak{F} \lhd \mathfrak{N}$. Aber die Gruppe $[J(T), \mathfrak{F}]$ liegt in Q und enthält Elemente aus $Q \setminus Z(Q)$, somit ist $[J(T), \mathfrak{F}, \mathfrak{F}] = \langle z \rangle$. Es folgt $C_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{F}) = C_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{E}$ und $O_2(\mathfrak{M}) \leqslant \mathfrak{E}$, ein Widerspruch. Also ist $L(\mathfrak{M}) \neq 1$.

Es ist $r(L(\mathfrak{M})) \leqslant 4$, also $\mathfrak{M}/L(\mathfrak{M})$ auflösbar und damit $\mathfrak{L} \leqslant L(\mathfrak{M})$. Weiter ist $| \mathfrak{E} \cap L(\mathfrak{M})| \geqslant 8$. Nach Lemma 4.2 ist $O(L(\mathfrak{M})) = 1$. Weiter ist $Z(L(\mathfrak{M})) \leqslant$

$C_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{E} \cap L(\mathfrak{M})) \leqslant \mathfrak{E}$, also $Z(L(\mathfrak{M})) \leqslant \langle \mathfrak{n}_1 \rangle$. Wegen $C_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{n}_1) = \mathfrak{N}$ folgt $Z(L(\mathfrak{M})) = 1$.

Somit ist $L(\mathfrak{M})$ eine einfache Gruppe, die in $L_{10}(2)$ involviert ist und eine Ordnung $\leqslant |\mathfrak{N}| \cdot 1023$ hat. Die Arbeit von Gorenstein und Harada über Gruppen vom sektionalen 2-Rang $\leqslant 4$ [6] liefert dann, daß $L(\mathfrak{M})$ isomorph zu einer der Gruppen J_2, A_8, A_9, A_{10} oder M_{22} ist. Da keiner dieser Gruppen eine Involution besitzt, deren Zentralisator isomorph zu einer Erweiterung von E_{16} durch $L_2(7)$ ist, liegt die Involution $\mathfrak{n}_1$ außerhalb von $L(\mathfrak{M})$. Somit ist $L(\mathfrak{M})$ eine Gruppe, die einen äußeren Automorphismus der Ordnung 2 besitzt, dessen Zentralisator in $L(\mathfrak{M})$ isomorph zu einer treuen Erweiterung von E_8 durch $L_2(7)$ ist. Es folgt $L(\mathfrak{M}) \cong M_{22}$. Wegen $|\operatorname{Aut}(M_{22}) : M_{22}| = 2$ folgt $\mathfrak{M} \cong \operatorname{Aut}(M_{22})$. Insbesondere folgt $J(T) \cong E_2 10$, und die in H involvierte Erweiterung von E_{16} durch A_8 zerfällt.

5. Bestimmung von G

Wir behandeln zunächst immer noch den Fall $Z(H) = \langle z \rangle$. Das folgende Lemma gibt einige Eigenschaften von M_{22} und $\operatorname{Aut}(M_{22})$ an.

Lemma 5.1. *Sei M eine Gruppe isomorph zu $\operatorname{Aut}(M_{22})$. In $M' \cong M_{22}$ gibt es genau eine Klasse von Involutionen. Sei T eine Sylow 2-Untergruppe von M'. Dann besitzt T genau zwei Untergruppen isomorph zu E_{16}, und beide liegen normal in T. Seien E_1 und E_2 diese beiden Untergruppen von T. Dann ist $N_{M'}(E_1)$ isomorph zu einer zerfallenden treuen Erweiterung von E_{16} durch Σ_5 und $N_{M'}(E_2)$ isomorph zu einer zerfallenden treuen Erweiterung von E_{16} durch A_6. Weiter ist $N_M(E_1) \cong E_{32}\Sigma_5$ und $N_M(E_2) \cong E_{16}\Sigma_6$. In $N_M(E_2)$ gibt es eine Untergruppe $K_1 \cong \Sigma_6$ mit $N_M(K_1) \cong \operatorname{Aut}(A_6)$.*

Beweis. Siehe etwa [12].

Nach Lemma 1.8 ist die Operation von $\mathfrak{M} \cong \operatorname{Aut}(M_{22})$ auf $J(T) \cong E_2 10$ eindeutig bestimmt. Insbesondere ist $J(T)$ der M_{22}-Modul, der in der Gruppe Co_2 vorkommt. In seiner Sylow 2-Charakterisierung von Co_2 gibt Yoshida in [16] Erzeugende und Relationen des Zentralisators einer zentralen Involution y in Co_2 an. Wir verwenden die Notation von Yoshida und bestimmen die Operation einer Untergruppe isomorph zu $E_{16}\Sigma_6$ in $\mathfrak{M}$ auf $J(T)$.

Sei G_0 eine Gruppe isomorph zu Co_2. Sei weiter T_0 eine Sylow 2-Untergruppe von G_0, die von den Involutionen a_i, $i = 1, 2, 3$. b_j, $j = 1,..., 6$ und c_k, $k = 1,..., 8$, erzeugt wird, Es sei $[a_1, a_2] = a_3$, $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cong D_8$, $\langle b_1, ..., b_6 \rangle \cong E_{64}$ und $[c_i, c_j] = y$, falls $i + j = 9$, und $[c_i, c_j] = 1$ für $i + j \neq 9$, also $\langle c_1, ..., c_8 \rangle \cong D_8{}^4$, dabei ist $Z(T_0) = \langle y \rangle$ mit $y^2 = 1$. Weiter sei $C_{G_0}(y) = \langle T_0, w_0, w_1, w_2 \rangle$ mit Involutionen w_0, w_1, w_2, die von der Weylgruppe von $C_{G_0}(y)/\langle c_1, ..., c_8 \rangle \cong Sp(6, 2)$ herkommen. Dann ist mit den in [16] angegebenen Relationen $J(T_0) = \langle y, c_8, c_7, c_6, c_5, b_6, b_5, b_4, a_2, a_3\rangle$ und $N_{C_{G_0}(v)}(J(T_0))/J(T_0) = \langle c_4, c_3, c_2, c_1\rangle\langle b_3, b_2, b_1, a_1, w_0, w_1\rangle\, J(T_0)/J(T_0) \cong E_{16}\Sigma_6$. Wir setzen $\overline{N(J(T_0))} = N(J(T_0))/J(T_0)$, $\bar{E}_2 = \langle \bar{c}_4, \bar{c}_3, \bar{c}_2, \bar{c}_1\rangle \cong E_{16}$ und $\bar{K} = \langle \bar{b}_3, \bar{b}_2, \bar{b}_1, \bar{a}_1, \bar{w}_0, \bar{w}_1\rangle \cong \Sigma_6$. Die beiden folgenden Tabellen geben die Operation von $\bar{K}$ auf $\bar{E}_2$, und die Operation von $\bar{E}_2\bar{K}$ auf $J(T_0)$ an, dabei stehen in den einzelnen Spalten der Tabellen die Konjugierten der Elemente der ersten Spalte unter dem jeweiligen Element der entsprechenden Kopfzeile.

TABELLE I

Die Operation von $\bar{K} \cong \Sigma_6$ auf $\bar{E}_2 \cong E_{16}$

	$\bar{b}_1$	$\bar{b}_2$	$\bar{b}_3$	$\bar{a}_1$	$\bar{w}_0$	$\bar{w}_1$
$\bar{c}_4$	$\bar{c}_4$	$\bar{c}_4$	$\bar{c}_4$	$\bar{c}_4$	$\bar{c}_3$	$\bar{c}_4$
$\bar{c}_3$	$\bar{c}_3\bar{c}_4$	$\bar{c}_3$	$\bar{c}_3$	$\bar{c}_3$	$\bar{c}_4$	$\bar{c}_2$
$\bar{c}_2$	$\bar{c}_2$	$\bar{c}_2\bar{c}_4$	$\bar{c}_2$	$\bar{c}_2\bar{c}_3$	$\bar{c}_1$	$\bar{c}_3$
$\bar{c}_1$	$\bar{c}_1\bar{c}_2$	$\bar{c}_1\bar{c}_3$	$\bar{c}_1\bar{c}_4$	$\bar{c}_1$	$\bar{c}_2$	$\bar{c}_1$

TABELLE II

Die Operation von $\bar{E}_2\bar{K}$ auf $J(T_0) \cong E_2 10$

	$\bar{c}_4$	$\bar{c}_3$	$\bar{c}_2$	$\bar{c}_1$	$\bar{b}_3$	$\bar{b}_2$	$\bar{b}_1$	$\bar{a}_1$	$\bar{w}_0$	$\bar{w}_1$
y	y	y	y	y	y	y	y	y	y	y
c_8	c_8	c_8	c_8	c_8y	c_8	c_8	c_8	c_8	c_7	c_8
c_7	c_7	c_7	c_7y	c_7	c_7	c_7	c_7c_8y	c_7	c_8	c_6
c_6	c_6	c_6y	c_6	c_6	c_6	c_6c_8y	c_6	c_6c_7	c_5	c_7
c_5	c_5y	c_5	c_5	c_5	c_5c_8	c_5c_7y	c_5c_6y	c_5	c_6	c_5
b_4	b_4c_8y	b_4c_7y	b_4c_6y	b_4c_5y	b_4	b_4	b_4	b_4	b_4	b_4
b_5	b_5	b_5c_8	b_5	b_5c_6	b_5	b_5	b_5	b_5b_6	a_3	b_6
b_6	b_6	b_6	b_6c_8	b_6c_7	b_6	b_6	b_6	b_6	b_6	b_5
a_2	a_2c_6	a_2c_5	a_2	a_2	a_2b_5	$a_2b_4b_6$	a_2	a_2a_3	a_2	a_3
a_3	a_3c_7	a_3	a_3c_5	a_3	a_3b_6	a_3	$a_3b_4b_5$	a_3	b_5	a_2

LEMMA 5.2. *Sei F eine Gruppe mit Normalteiler $J \cong E_2 10$ und $F/J \cong$ Aut(M_{22}). Sei X eine Untergruppe von F mit $X/J \cong E_{16}\Sigma_6$. Die Operation von X auf J entspreche der Operation von $\bar{E}_2\bar{K}$ auf $J(T_0)$ aus Tabelle* II. *Gibt es in X eine Untergruppe $W \cong E_8$, die auf J so operiert wie $\langle \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3\rangle$ auf $J(T_0)$, so zerfällt F über J.*

Beweis. Wir verwenden die Notation von Yoshida. Es sei also $J = \langle y, c_8, c_7, c_6, c_5, b_6, b_5, b_4, a_2, a_3\rangle$ und $\bar{X} = X/J = \langle \bar{c}_4, \bar{c}_3, \bar{c}_2, \bar{c}_1\rangle\, \langle \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \bar{a}_1, \bar{w}_0, \bar{w}_1\rangle$. Die Relationen in $\bar{X}$ seien wie in $\bar{E}_2\bar{K}$ und die Operation von $\bar{X}$ auf J wie in Tabelle II. Weiter sei $\bar{E} = O_2(\bar{X}) \cong E_{16}$ und $\bar{K}$ eine Untergruppe von

$\bar{X}$ isomorph zu Σ_6. Nach Lemma 5.1 können wir $\bar{K}$ so wählen, daß $N_{\bar{F}}(\bar{K}) = \bar{K}\langle\bar{t}\rangle \simeq \mathrm{Aut}(A_6)$. Man stellt fest:

(i) Für eine Involution $\bar{x} \in \bar{F}'$ gilt $|C_J(\bar{x})| = 2^6$.

(ii) Es ist $V = C_J(\bar{E} \bmod \langle y\rangle) = \langle y, c_8, c_7, c_6, c_5\rangle$ von der Ordnung 2^5 und $C_J(\bar{E}) = \langle y\rangle$.

(iii) Es ist $[\bar{E}, J] = V$, weiter ist $V_1 = V\langle b_4\rangle$ invariant unter $\bar{X}$ und $[\bar{E}, V_1] = V$, also $|[\bar{E}, b_4]| = 2^4$.

(iv) Sei E das volle Urbild von $\bar{E}$ in X. Eine Σ_6 operiert auf der Gruppe E/V_1 der Ordnung 2^8 mit irreduziblen Kompositionsfaktoren $E/J \simeq J/V_1 \simeq E_{16}$. Nach Lemma 1.5 ist E/V_1 elementar-abelsch. Es ist $|C_{E/J}(\bar{b}_3)| = 2^3$ und $|C_{J/V_1}(\bar{b}_3)| = 2^2$. Somit sind die Σ_6-Moduln E/J und J/V_1 nichtäquivalent. Nach Lemma 1.6 ist E/V_1 ein vollständig reduzibler $\bar{K}$-Modul. Also gibt es in E eine $\bar{K}$-invariante Untergruppe D_0 mit $\bar{D}_0 = \bar{E}$ und $D_0 \cap J = V_1$.

(v) Nach (iii) ist $D_0/\langle y\rangle$ isomorph zu $E_{16} \wr Z_2$. Somit gibt es in D_0 eine $\bar{K}$-invariante Untergruppe D mit $D/\langle y\rangle \simeq E_2 8$ und $\bar{D} = \bar{E}$. Weiter ist $D \cap J = V$. Nach (ii) ist D extraspezieller Normalteiler von X.

(vi) Setze $\hat{X} = X/D$. Es ist $Z(\hat{X}) = \langle\hat{b}_4\rangle$. Nach Voraussetzung gibt es in X eine Untergruppe $W \simeq E_8$ mit $[W, \langle b_4, b_5, b_6\rangle] = 1$. Setze $A = W\langle b_4, b_5, b_6\rangle \simeq E_{64}$. Es ist $A \cap D = 1$. Also gibt es in X eine Untergruppe isomorph zu E_{64}. Eine nichtzerfallende Erweiterung von E_{16} durch Σ_6 hat 2-Rang 4, also zerfällt $\hat{X}/\langle\hat{b}_4\rangle$ über $O_2(\hat{X})/\langle\hat{b}_4\rangle$. In der perfekten zentralen Erweiterung $\hat{A}_6$ von Z_2 durch A_6 liegen alle Involutionen in $Z(\hat{A}_6)$. Aber es ist $\hat{W} \simeq E_8$ und $\hat{W} \cap O_2(\hat{X}) = 1$, es folgt daß $\hat{X}$ über $O_2(\hat{X})$ zerfällt.

Somit haben wir gezeigt, daß in X ein Normalteiler $D \simeq D_8^4$ existiert, so daß X/D isomorph zu einer treuen zerfallenden Erweiterung von E_{32} durch Σ_6 mit Zentrum der Ordnung 2 ist. Weiter operiert eine Sylow 5-Untergruppe von X/D fixpunktfrei auf dem orthogonalen Vektorraum $D/\langle y\rangle$. Nach Lemma 1.7 ist die Operation von X/D auf $D/\langle y\rangle$ eindeutig bestimmt. Insbesondere gibt es ein Urbild K von $\bar{K}$ in X, sodaß K auf $D/\langle y\rangle$ vollständig reduzibel operiert. Dabei ist $K \cap J \leqslant D$. Sei also $D = VV_0$ mit K-invarianten Untergruppen V, $V_0 \simeq E_{32}$ in D und $V \cap V_0 = \langle y\rangle$, insbesondere $V_0 \cap J = \langle y\rangle$ und $\bar{V}_0 = \bar{E}$, Weiter ist nach Voraussetzung $KJ = K^t J$ für ein Urbild t von $\bar{t}$ in F.

Die Gruppe $JK\langle t\rangle$ erfüllt die Voraussetzungen des Lemmas 1.9. Also können wir sogar $K \simeq \Sigma_6$ annehmen.

Somit zerfällt KD über D, und in KD existiert die Untergruppe K_0V_0 mit $K_0 \simeq \Sigma_6$, $V_0 \simeq E_{32}$, $K_0V_0 \cap J = \langle y\rangle$. Operiert K_0 zerlegbar auf V_0, so gibt es in K_0V_0 eine Untergruppe K_0V_0' vom Index 2, die J trivial anschneidet. Dann zerfällt X und damit auch F über J. Sei also die Operation von K_0 auf V_0 unzerlegbar. Wir setzen $U = K_0D$. Auf V_0 operiert treu die Gruppe $U/V_0 \simeq E_{16}\Sigma_6$. Sei $\mathfrak{W}$ die Menge der Hyperebenen in V_0, die y nicht enthalten. Dann operiert V regulär auf $\mathfrak{W}$, für $E \in \mathfrak{W}$ ist $|U : N_U(E)| = 16$ und $V \cap N_U(E) = 1$. Es folgt $N_U(E) = V_0 K_1$ mit $K_1 \cong \Sigma_6$. Wieder ist $EK_1 \cap J = 1$. Somit zerfällt X und damit F über J. Die Behauptung ist bewiesen.

Lemma 5.3. *$N = N_G(J(T))$ zerfällt über $J(T)$.*

Beweis. Sei $T < S \in \mathrm{Syl}_2(N)$ mit $Z(S) = \langle x \rangle$. Nach Lemma 5.2 bleibt nur noch zu zeigen, daß es in $C_N(x)$ eine Untergruppe $W \cong E_8$ gibt, die auf $J(T)$ wie $\langle \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3 \rangle$ auf $J(T_0)$ in der Bezeichnung von Yoshida operiert. Dazu identifizieren wir S mit einer Sylow 2-Untergruppe S_0 von F aus Lemma 5.2. Es ist $Z_2(S) = \langle x, z \rangle$, und mit $z \sim zx$ in N gibt es in S eine Untergruppe $Q_1 \cong Q$ mit $Q_1' = \langle zx \rangle$. Weiter ist mit $\bar{S}_0 = S_0/J = \langle \bar{c}_4, \bar{c}_3, \bar{c}_2, \bar{c}_1, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \bar{a}_1 \rangle$ und $J = \langle y, c_8, c_7, c_6, c_5, b_6, b_5, b_4, a_2, a_3 \rangle$ dann $Z_2(S_0) = \langle y, c_8 \rangle$, also existiert in S_0 eine Untergruppe $Q_0 \cong Q$ mit $Q_0' = \langle c_8 y \rangle$. Es ist $|Q \cap J(T)| = |Q_1 \cap J(T)| = 2^7$ und mit $\bar{N} = N/J(T)$ dann $Z(C_{\bar{N}}(z, x)) = \bar{Q} \cap \bar{Q}_1$, weiter $O_2(C_{\bar{N}}(z)) = \bar{Q}$ und $O_2(C_{\bar{N}}(zx)) = \bar{Q}_1$. Setze $\bar{Y} = C_{\bar{F}}(y, c_8)$, mit Tabelle II berechnet man $\bar{Y} = \langle \bar{c}_4, \bar{c}_3, \bar{c}_2, \bar{b}_3, \bar{b}_2, \bar{b}_1, \bar{w}_1 \rangle \cong (E_8\Sigma_4) \times Z_2$ und $Z(\bar{Y}) = \langle \bar{b}_3, \bar{c}_4 \rangle$. Es folgt $\langle \bar{b}_3, \bar{c}_4 \rangle < \bar{Q}_0$. Weiter ist $Z = C_J(\langle \bar{b}_3, \bar{c}_4 \rangle \bmod \langle c_8 y \rangle) = \langle y, c_8, c_7, c_6, b_4, b_5, b_6 \rangle$ von der Ordnung 2^7, also $Z = J \cap Q_1$ und demnach $\bar{Q}_1 = C_{\bar{S}_0}(Z \bmod \langle c_8 y \rangle) = \langle \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \bar{c}_4 \rangle$. Die Struktur von $Q_1 \cong Q$ liefert, daß es Urbilder b_1, b_2 und b_3 mit $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle \cong E_8$ gibt. Somit ist die Existenz von W gezeigt.

Lemma 5.4. *$G \cong Co_2$.*

Beweis. Nach Lemma 5.3 besitzt N Sylow 2-Untergruppen vom Typ Co_2, diese enthalten nach [16] je genau eine Untergruppe isomorph zu $E_2 10$. Es folgt $J(T)$ char S, also $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$. Mit $S \cap G' \geqslant \langle S \cap H', S \cap N' \rangle = S$ besitzt G keine Untergruppe vom Index 2. Nach Theorem 4.1 aus [16] folgt $G/O(G) \cong Co_2$. Es gibt mit Lemma 1.2 ein $f \in Q \backslash Z(Q)$ mit $z \sim f$. Die Fixpunktformel liefert also $O(G) = 1$, d.h. die Behauptung.

Per Induktion nach $|Z(H)|$ beweisen wir nun Satz A.

Satz 5.5. *Sei $|Z(H)| = 2^{(m-1)}$. Dann ist die Gruppe G isomorph zu $Co_2 \times E_2 m$.*

Beweis. Für $m = 0$ ist der Satz mit Lemma 5.4 bewiesen. Sei also $m > 0$. Mit Lemma 1.10 gibt es ein $t \in Z(H)^{\#}$ mit $C_G(t) > HO(C_G(t))$. Dann ist insbesondere $z \notin Z^*(C_G(t))$ und $z\langle t \rangle \notin Z^*(C_G(t)/\langle t \rangle)$. Per Induktion ist also $C_G(t)/\langle t \rangle$ isomorph zu $Co_2 \times E_2(m-1)$. Der Schurmultiplikator von Co_2 ist trivial [4], also ist $C_G(t) \cong Co_2 \times E_2 m$. Derselbe Schluß zeigt $C_G(s) \cong Co_2 \times E_2 m$ für alle $s \in Z(C_G(t))^{\#}$. Es folgt $C_G(s) = C_G(t) = A \times E$ für alle $s \in Z(C_G(t))^{\#}$ mit $A \cong Co_2$ und $E \cong E_2 m$. Setze $K = C_G(A)$. Wegen $z \in A$ ist $K = C_H(A) = E$. Die Zentralisatoren aller Involutionen aus E stimmen überein, also ist K tightly embedded in G. Nach [4] ist $\mathrm{Aut}(Co_2) \cong Co_2$. Es folgt $N_G(A) = AC_G(A) = A \times E$. Weiter ist $N_G(K) = N_G(E) \leqslant N_G(C_G(s)) \leqslant N_G(C_G(s)') = N_G(A)$ für $s \in E^{\#}$. Also ist $N_G(A) = N_G(K)$. Weiter kommutiert A mit keinem seiner Konjugierten, also ist A eine Standarduntergruppe von G im Sinne von Aschbacher und Seitz [2]. Das Hauptresultat aus [2] liefert, daß die Behauptung für $m \geqslant 2$ bewiesen ist, falls $O(G) = 1$. Das folgt aber wie in Lemma 5.4.

Es bleibt der Fall $C_G(t) = A \times \langle t \rangle$, also $m = 1$. Sei zunächst eine Sylow 2-Untergruppe S von $C_G(t)$ bereits eine Sylow 2-Untergruppe von G. Dann ist die Involution t nach Lemma 1.4 nicht in G' enthalten. Somit hat G' Sylow 2-Untergruppen vom Typ Co_2. Es ist $O(G') = 1$ und $O^2(G') = G'$, also folgt $G' \cong Co_2$ mit [16]. Mit $\mathrm{Aut}(Co_2) \cong Co_2$ und $C_G(G') \leqslant H$ erhält man $G \cong Co_2 \times Z_2$, also die Behauptung.

Sei nun S keine Sylow 2-Untergruppe von G, etwa $S <_2 S_1 \leqslant S_2 \in \mathrm{Syl}_2(G)$. Es ist $J(S) \cong E_2 11$ und S_1 normalisiert $J(S)$. Unter $C_G(t)$ zerfällt $J(S)^{\#}$ in 7 Bahnen der Länge 1/77/77/330/330/616/616. Die Involution t besitzt Konjugierte in $J(S) \setminus \langle t \rangle$ unter $N_G(J(S))$. Weiter hat die Involution z genau 330 Konjugierte in $J(S)$ unter $C_G(t)$ und höchstens $2^{11} - 1$ Konjugierte in $J(S)$ unter G. Mit $N_G(J(S)) > N_G(J(S)) \cap C_G(t) > N_G(J(S)) \cap C_G(z)$ folgt $[N_G(J(S)) : N_G(J(S)) \cap C_G(t)] \leqslant 2^{11} : 330 \leqslant 7$, also hat t höchstens 7 Konjugierte in $J(S)$ unter $N_G(J(S))$, ein Widerspruch zur obigen Bahnzerlegung von $J(S)$ unter $N_{C_G(t)}(J(S))$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Literatur

1. M. Aschbacher and G. Seitz, Involutions in Chevalley Groups over fields of even order, *Nagoya Math. J.* **63** (1976), 1–92.
2. M. Aschbacher and G. Seitz, On groups with a Standard Component of known type, *Osaka J. Math.* **13** (1976), 439–482.
3. B. Beisiegel, Über einfache endliche Gruppen mit Sylow 2-Untergruppen, deren Ordnung höchstens 2^{10} teilt, *Comm. Algebra* **5** (1977), 113–170.
4. J. H. Conway, "Three Lectures on exceptional Groups, Finite Simple Groups" (M. B. Powell and G. Higman, Eds.), Academic Press, London, 1971.
5. D. Gorenstein, "Finite Groups," Harper & Row, New York, 1968.
6. D. Gorenstein and K. Harada, Finite groups of sectional 2-rank at most 4, *in* "Finite Groups '72, Proc. of the Gainsville Conference," North-Holland, Amsterdam, 1973.
7. R. L. Griess, Jr., On a Subgroup of order $2^{15} \cdot GL(5,2)$ in $E_8(\mathbb{C})$, the Dempwolff group and $\mathrm{Aut}(D_8 * D_8 * D_8)$, *J. Algebra* **40** (1976), 271–279.
8. M. Hall, Jr., Simple Groups of order less than 1000000, *J. Algebra* **20** (1972), 98–102.
9. K. Harada, Finite simple groups whose Sylow 2-subgroups are of Order 2^7, *J. Algebra* **14** (1970), 386–404.
10. G. Higman, Odd characterizations of finite simple groups, University of Michigan Notes, 1968.
11. G. D. James, The modular characters of the Mathieu-groups, *J. Algebra* **27** (1973), 57–111.

12. Z. JANKO, A new finite simple group of order 86 775 571 046 077 562 830 which possesses M_{24} and the full covering group of M_{22} as subgroups, *J. Algebra* **42** (1976), 564–596.
13. G. STROTH, Einige Gruppen vom Charakteristik 2-typ, *J. Algebra* **51** (1978), 107–143.
14. G. STROTH, Gruppen mit kleinen 2-lokalen Untergruppen, *J. Algebra* **47** (1977), 441–454.
15. G. STROTH, A fusion lemma for a certain class of groups of characteristic 2-type, erscheint.
16. T. YOSHIDA, A characterization of the .2 Conway simple group, *J. Algebra* **46** (1977), 405–414.
17. T. YOSHIDA, Some applications of characters to transfer theorems, erscheint.